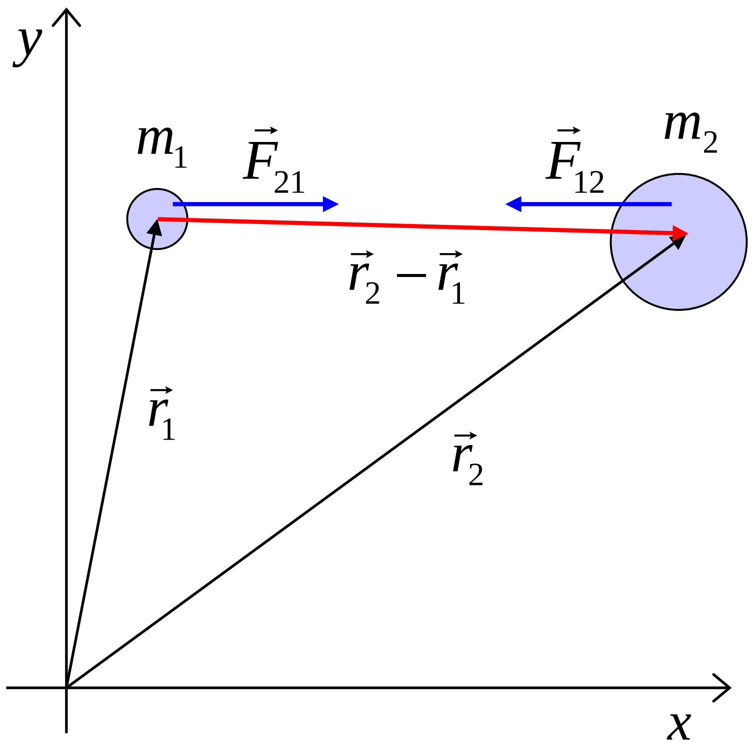
Opakování - Gravitační zákon

$$\vec{F}_{12} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^2} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|}$$

Formuloval jej Isaac Newton na základě analýzy pohybu Měsíce kolem Země, planet kolem Slunce a na základě znalosti Keplerových zákonů.

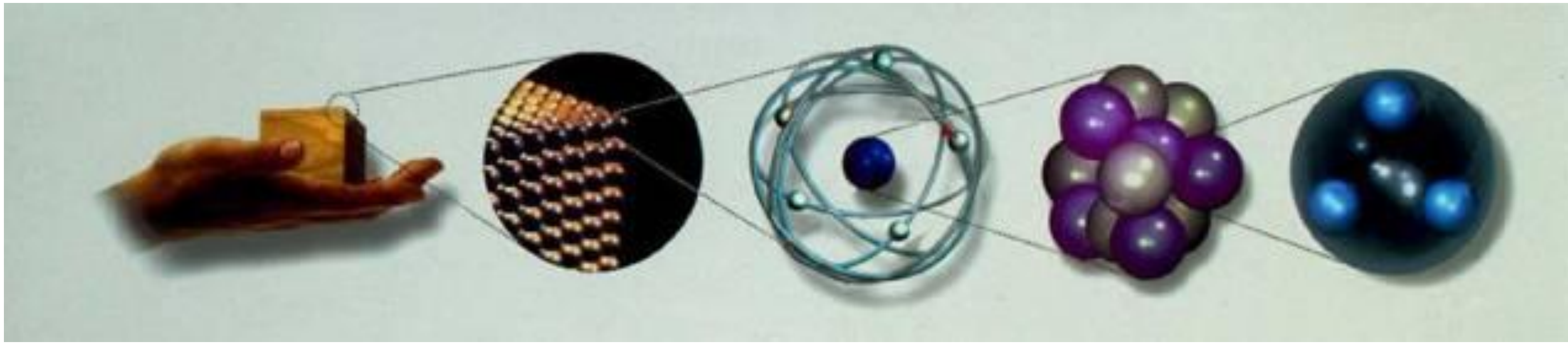


velikost gravitační síly

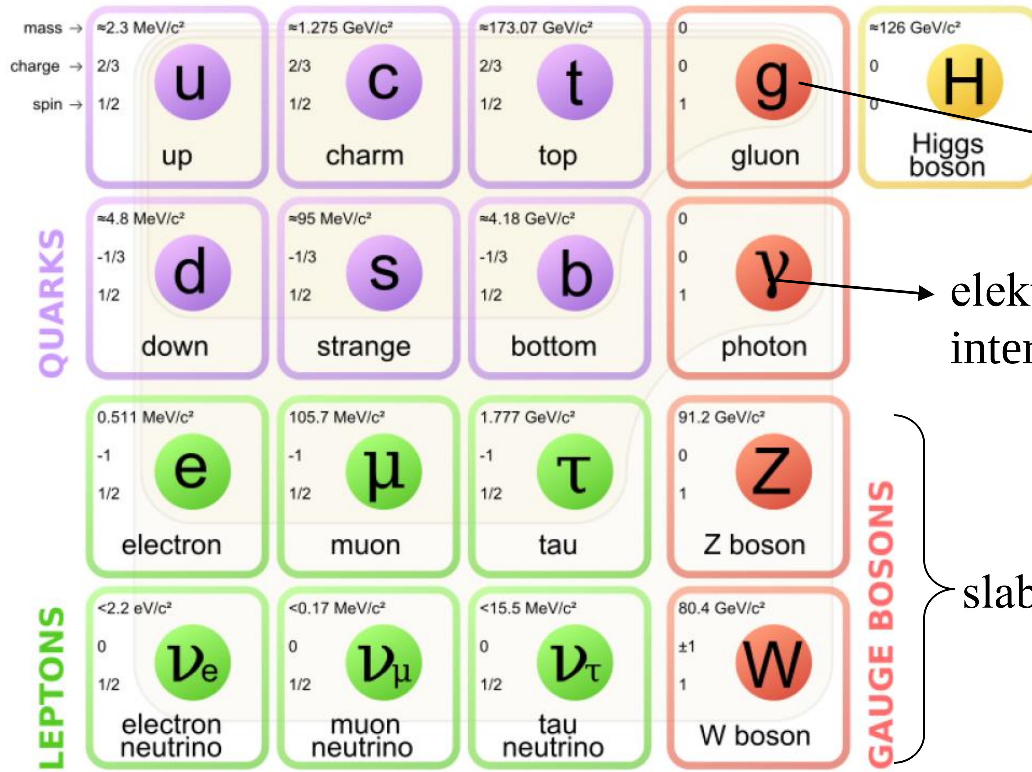
$$F = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad r \equiv \left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|$$

$$\kappa = 6.670 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}\ (\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}})$$

Elementární částice (standardní model)



tvoří hadrony
protony, neutrony,
mesony, baryony



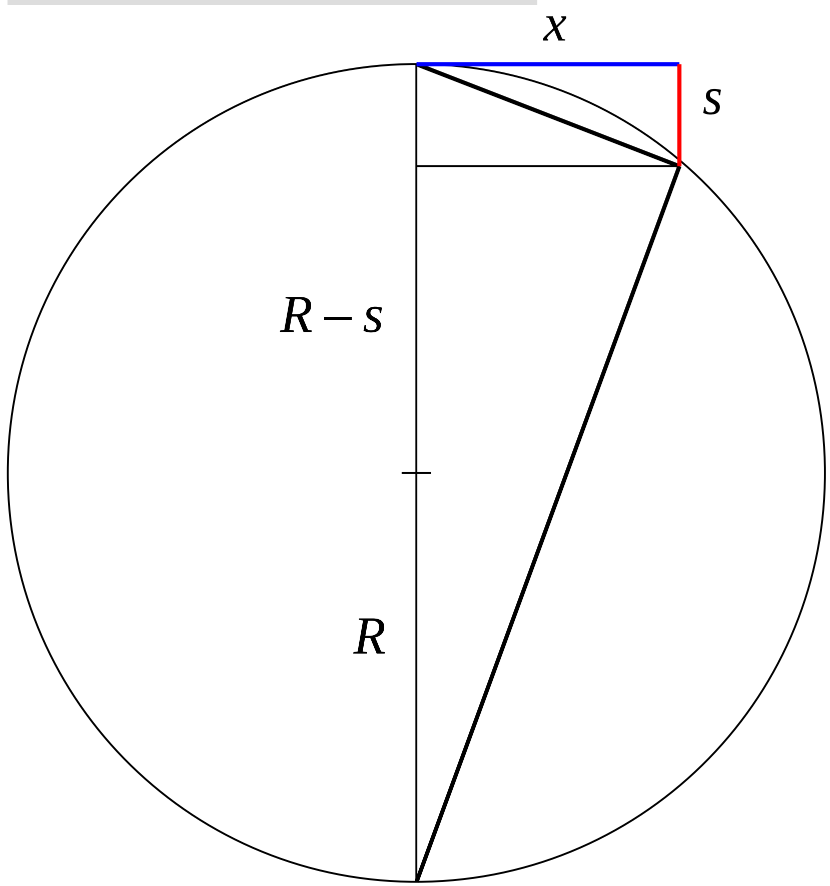
silná interakce

elektromagnetická
interakce

slabá interakce

Gravitační zákon

$$F = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$$



$$\frac{x}{s} = \frac{2R - s}{x} \Rightarrow x^2 = 2Rs - s^2$$

$$x = \sqrt{2Rs}$$

$$R = 6378 \text{ km}$$

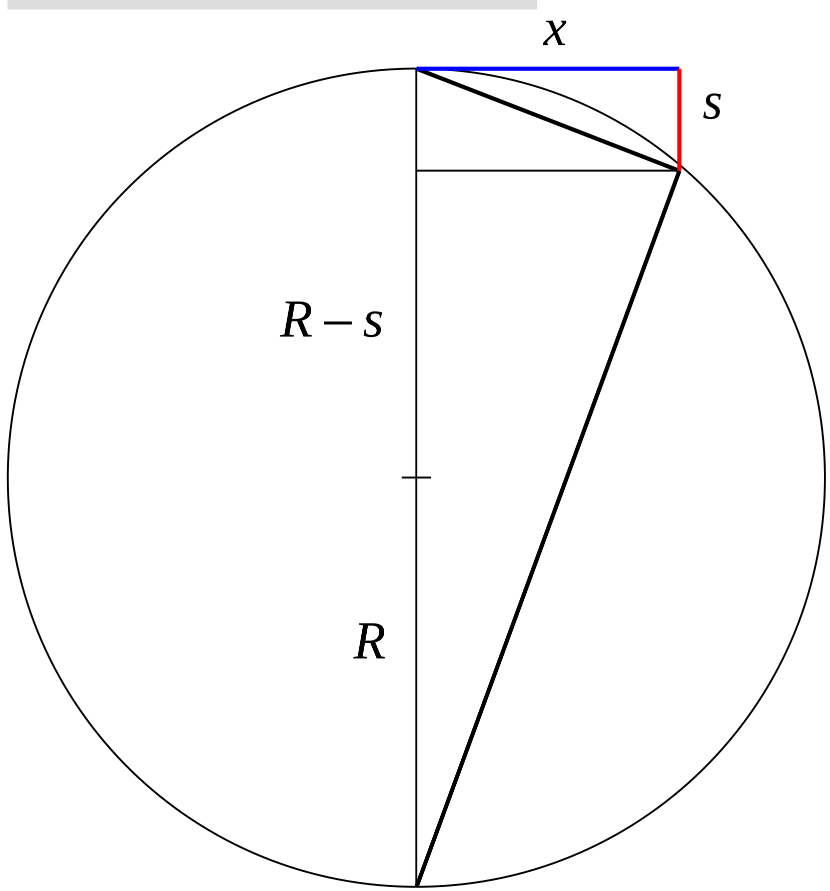
$$s = \frac{1}{2} g t^2 = 4.9 \text{ m}$$

$$v = 7.9 \text{ km/s}$$

1. kosmická rychlost

Gravitační zákon

$$F = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$$



těleso na Zemi: R = 6378 km

za 1 s pád o 4.9 m

$$x = \sqrt{2Rs} \Rightarrow s = \frac{(2\pi R/T)^2}{2R}$$

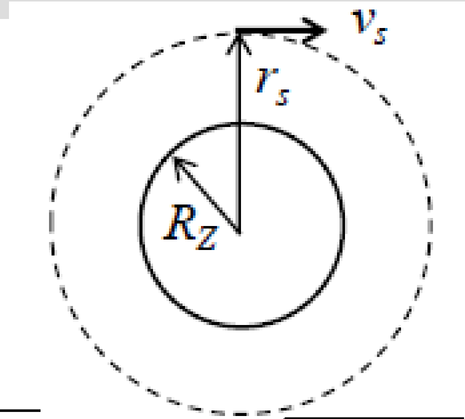
Měsíc:

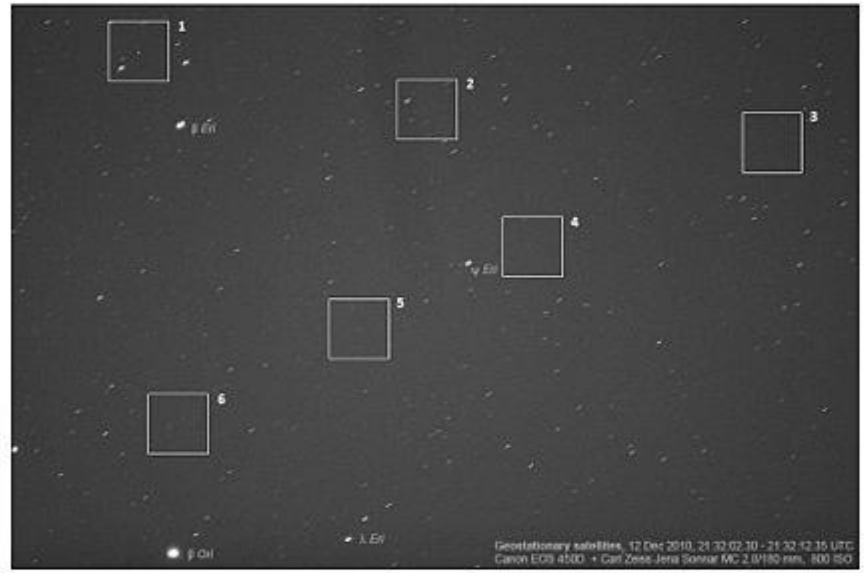
R = 380 000 km, T = 29 dní

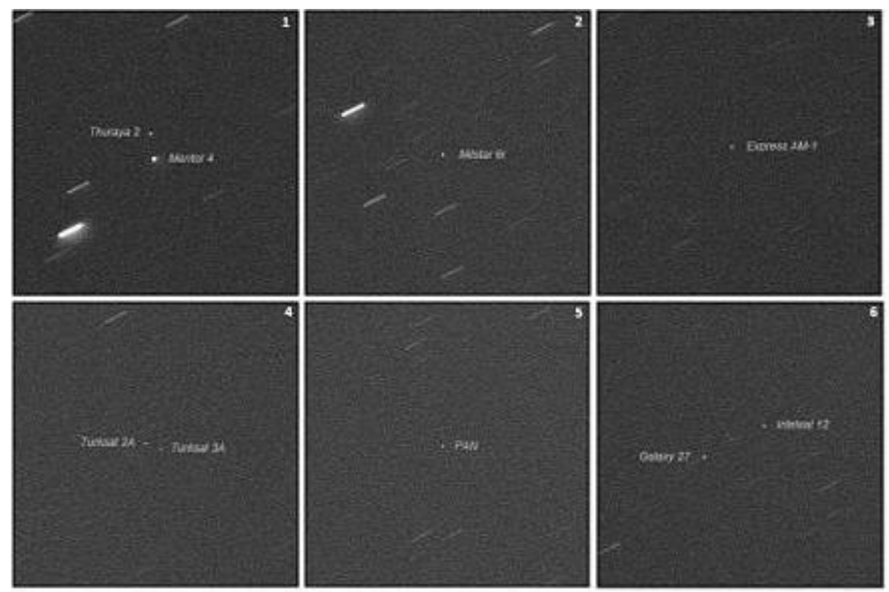
$\longrightarrow$ za 1 s spadne o ≈ 1.2 mm

Gravitační zákon

$$F = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$$







Geostacionární orbit:

$$x = \sqrt{2 r_S s} = \sqrt{2 r_S \tfrac{1}{2} g(r_S) t^2} \Rightarrow v_S = \sqrt{r_S g(r_S)}$$

$$m g(r) = \kappa \frac{m M_Z}{r^2} \Rightarrow g = g(R_z) = \kappa \frac{M_Z}{R_Z^2}$$

$$g(r_s) = \kappa \frac{M_Z}{r_s^2} = g \frac{R_Z^2}{M_Z} \frac{M_Z}{r_s^2} = g \frac{R_Z^2}{r_s^2}$$

$$v_S = \frac{2\pi r_S}{T} \Rightarrow \frac{4\pi^2 r_S^2}{T^2} = g \frac{R_Z^2}{r_S}$$

$$r_S = \sqrt[3]{\frac{g R_Z^2 T^2}{4\pi^2}} = 42300 \text{ km } (35000 \text{ km})$$

Opakování - Gravitační pole

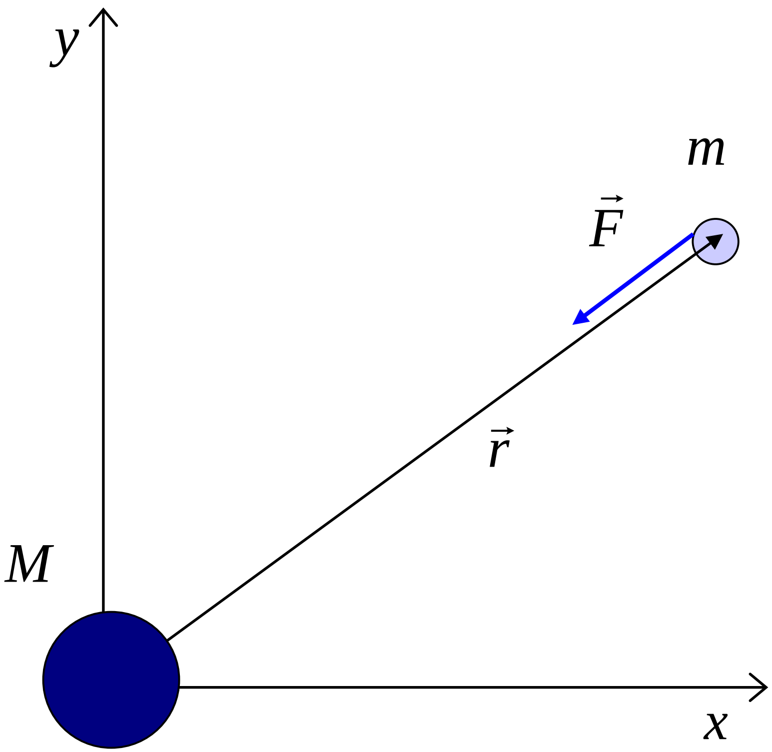
Gravitační zákon:

$$M \rangle\rangle m, \quad \vec{F} = -\kappa \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Intenzitu silového pole definujeme vztahem:

$$\vec{I} \equiv \frac{\vec{F}}{m} \qquad \left[\mathrm{N\,kg^{-1}}\right]$$

Velikost intenzity je číselně rovna síle, která by v daném místě působila na těleso o jednotkové hmotnosti



Těleso o hmotnosti M vytváří **gravitační pole** o intenzitě :

$$\vec{I}_g = -\kappa \frac{M}{r^2} \vec{e}_r, \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

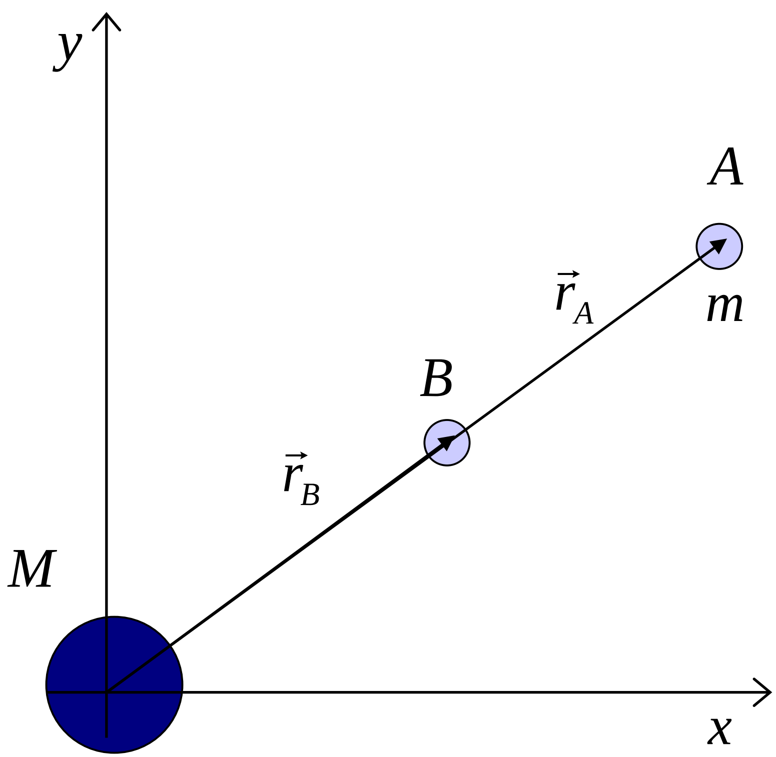
Opakování - Gravitační pole

Gravitační zákon:

$$M \rangle\rangle m, \quad \vec{F} = -\kappa \frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Při přemístění tělesa o hmotnosti *m* z bodu A do bodu B vykoná gravitační pole práci:

$$A_{AB} = m\int_{r_A}^{r_B} \vec{I}_g \mathrm{d}\vec{r} = m\int_{r_A}^{r_B} -\kappa \frac{M}{r^2}\vec{e}_r \mathrm{d}\vec{r} = mM\kappa\left[\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B}$$



$$\Delta W_{\mathrm{p}} = -A_{AB} = -mM\kappa\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

Hmotnému bodu o hmotnosti *m* v gravitačním poli přísluší tedy potenciální energie:

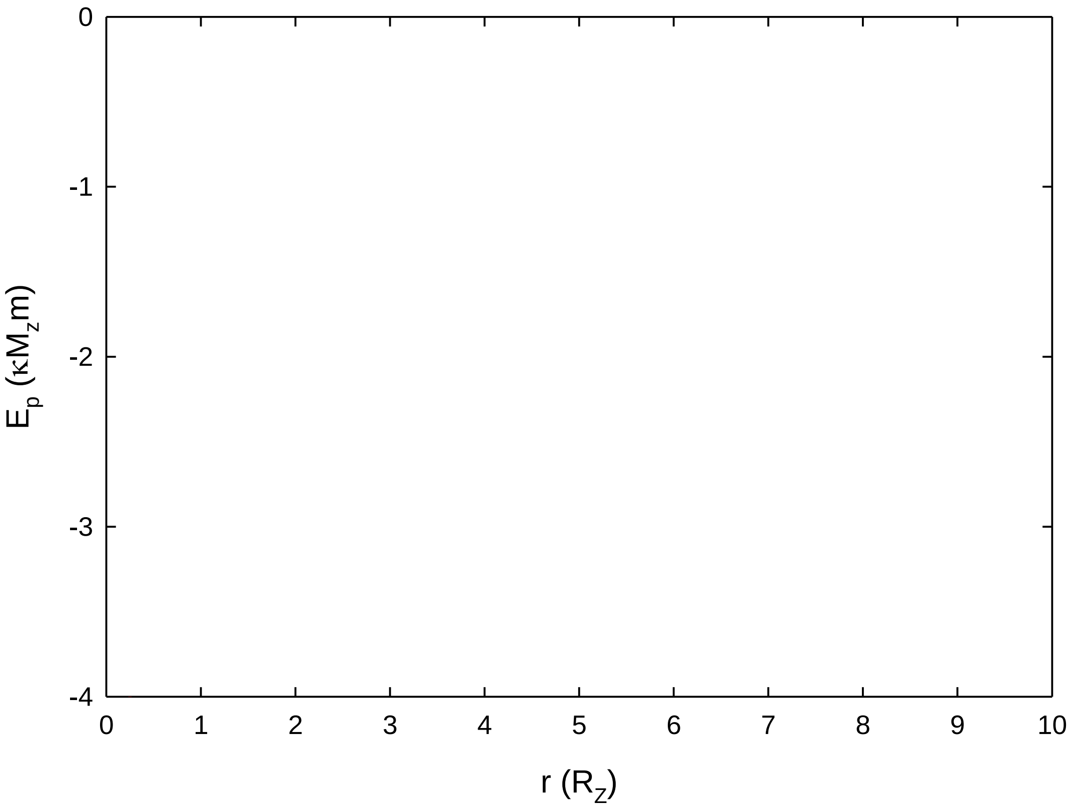
$$W_p(r) = E_p(r) = -\kappa \frac{mM}{r} + C$$

Nulovou potenciální energii zvolíme v nekonečnu:

$$\lim_{r\to\infty} W_p(r) = 0 \Rightarrow W_p(r) = -\kappa \frac{mM}{r}$$

Gravitační pole

Potenciální energie v gravitačním poli: $E_p = W_p(r) = -\dfrac{\kappa M_Z m}{r}$

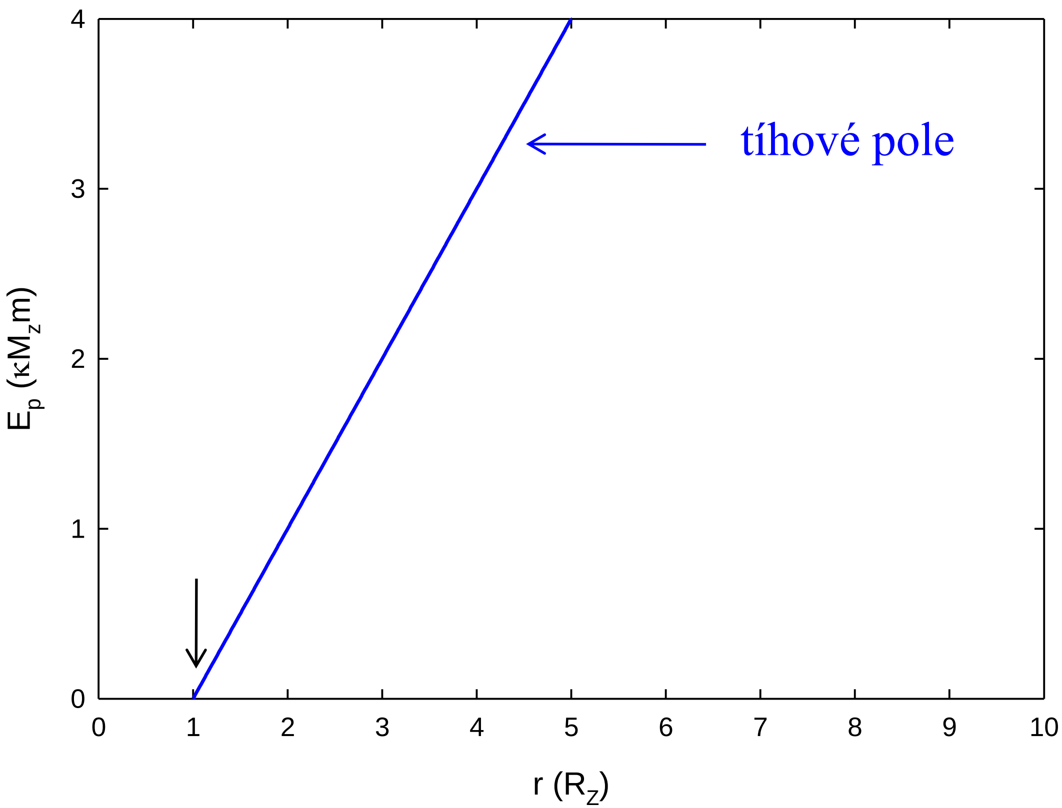


nulová hladina potenciální energie
v nekonečnu

Gravitační pole

Potenciální energie v tíhovém poli: $$W_{\mathrm{p}}(r) = mgh = mg(r - R_Z)$$

Potenciální energie v gravitačním poli: $$W_{\mathrm{p}}(r) = \kappa M_Z m\left(\frac{1}{R_Z} - \frac{1}{r}\right) = mg(r - R_Z)\frac{R_Z}{r}$$



$$W_p(r) = -\kappa\frac{mM}{r} + C$$

$$W_p(R_Z) = 0 \Rightarrow C = \kappa\frac{mM}{R_Z}$$

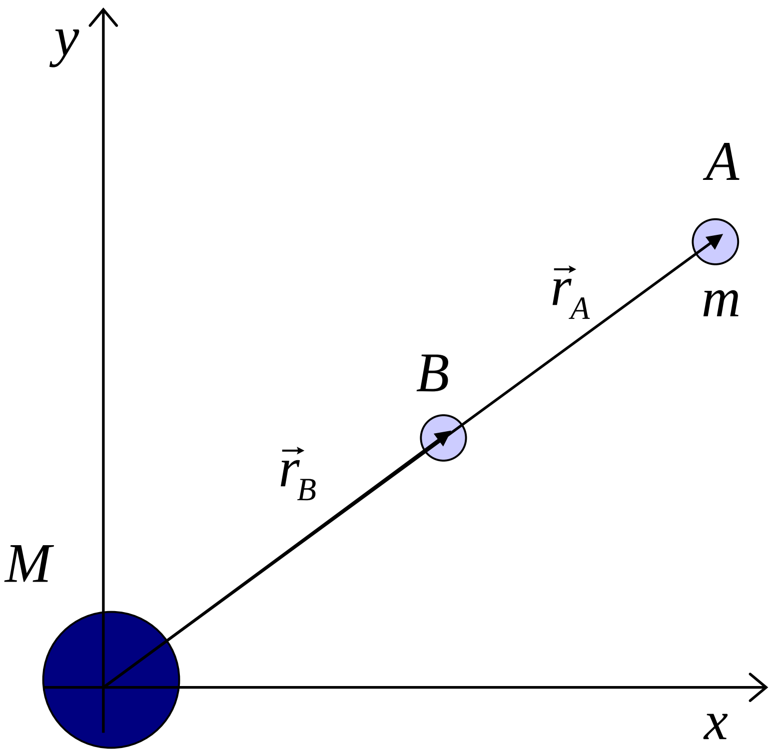
gravitační pole

nulová hladina potenciální energie na povrchu Země

Gravitační pole

Gravitační zákon:

$$M \rangle\rangle m, \quad \vec{F} = -\kappa \frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$



Potenciálem silového pole nazveme podíl:

$$\varphi(\vec{r}) \equiv \frac{W_p(\vec{r})}{m} \quad \left[m^2 s^{-2}\right]$$

Číselně se rovná potenciální energii hmotného bodu jednotkové hmotnosti

Potenciál gravitačního pole:

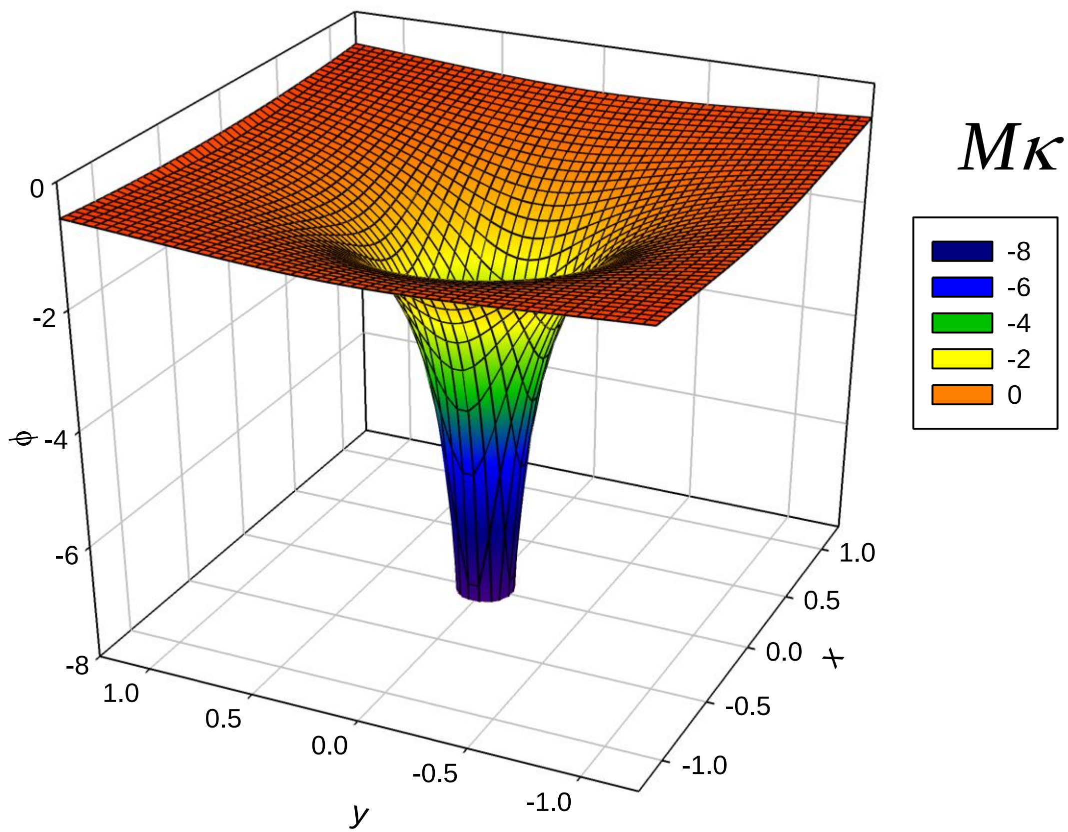
$$\varphi_g(\vec{r}) = \frac{W_p(\vec{r})}{m} = -\kappa \frac{M}{r}$$

Ekvipotenciální plocha – množina bodů prostoru se stejným potenciálem:

$$\varphi(x, y, z) = konst.$$

Gravitační pole hmotného bodu

potenciál gravitačního pole: $$\varphi(r) = -\kappa \frac{M}{r}$$



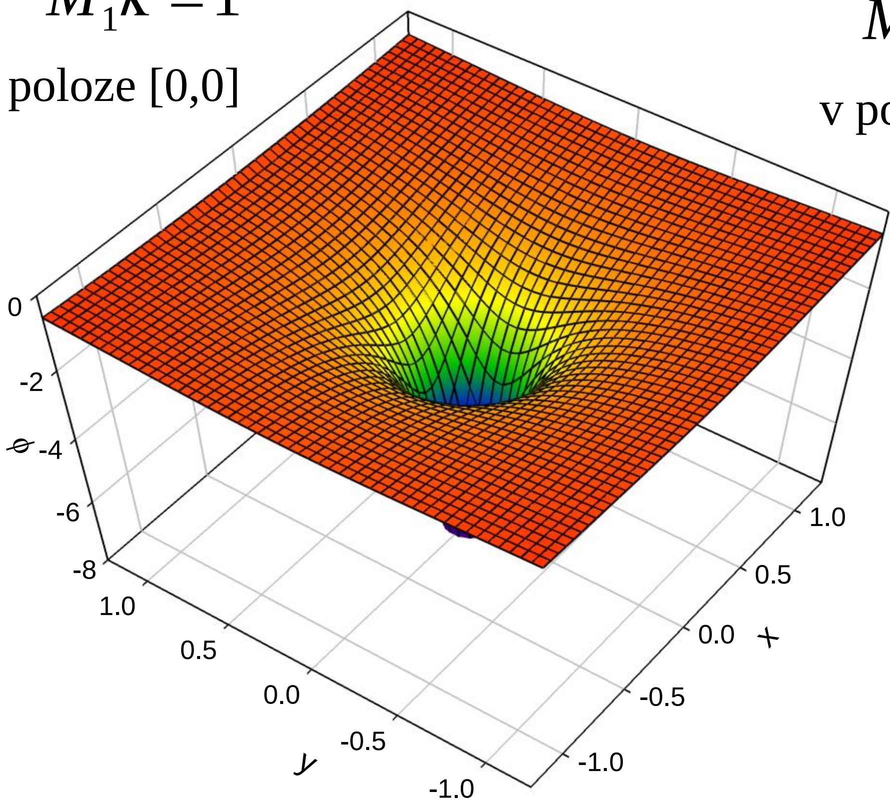
$$M\kappa = 1$$

Gravitační pole – princip superpozice

potenciál: $\varphi(r) = -\kappa \dfrac{M_1}{r - r_1}$ $\qquad\qquad$ $\varphi(r) = -\kappa \dfrac{M_2}{r - r_2}$

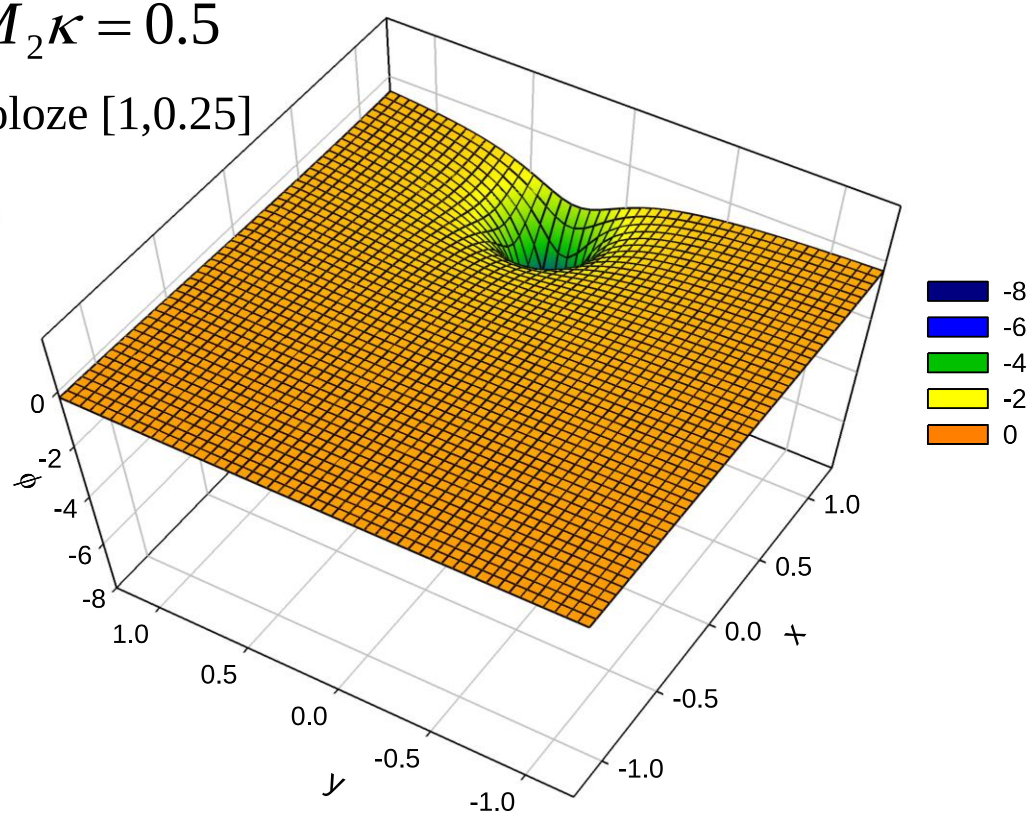
$M_1 \kappa = 1$

v poloze [0,0]



$M_2 \kappa = 0.5$

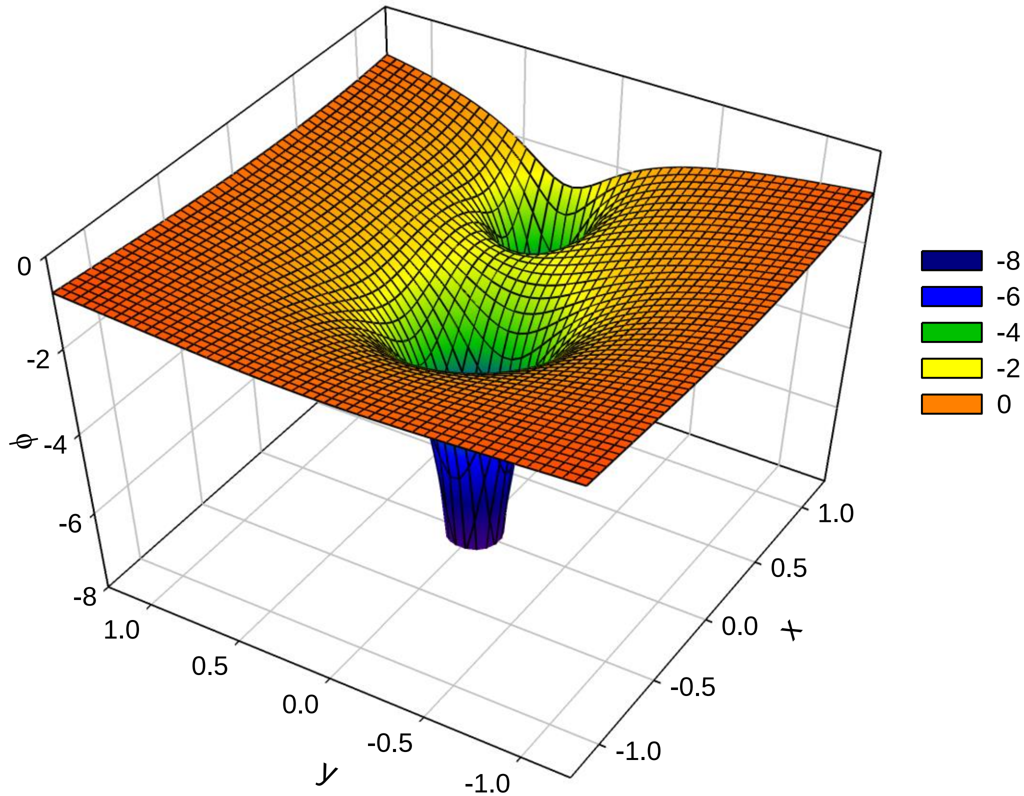
v poloze [1,0.25]



Gravitační pole – princip superpozice

potenciál:

$$\varphi(r) = -\kappa \frac{M_1}{r - r_1} - \kappa \frac{M_2}{r - r_2}$$



Souvislost potenciálu a intenzity pole

těleso o hmotnosti *m*:

potenciál: $\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z)$

potenciální energie : $W_p(\vec{r}) = E_p(\vec{r}) = m\varphi(\vec{r})$

intenzita: $\vec{I}(\vec{r}) = \vec{I}(x, y, z)$

síla: $\vec{F}(\vec{r}) = m\vec{I}(\vec{r})$

při posunutí o Δx se vykoná práce: $\Delta A = -\Delta E_p = F_x \Delta x$

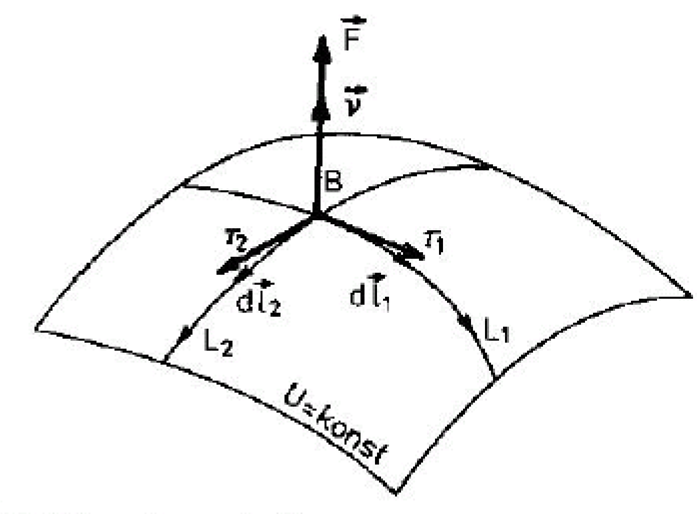
$$\varphi(x, y, z) = konst.$$

$$\longrightarrow \quad F_x = -\frac{\Delta E_p}{\Delta x} = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \qquad I_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

podobně:

$$F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \qquad I_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \qquad I_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$



Souvislost potenciálu a intenzity pole

těleso o hmotnosti *m*:

potenciál: $\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z)$

potenciální energie : $W_p(\vec{r}) = E_p(\vec{r}) = m\varphi(\vec{r})$

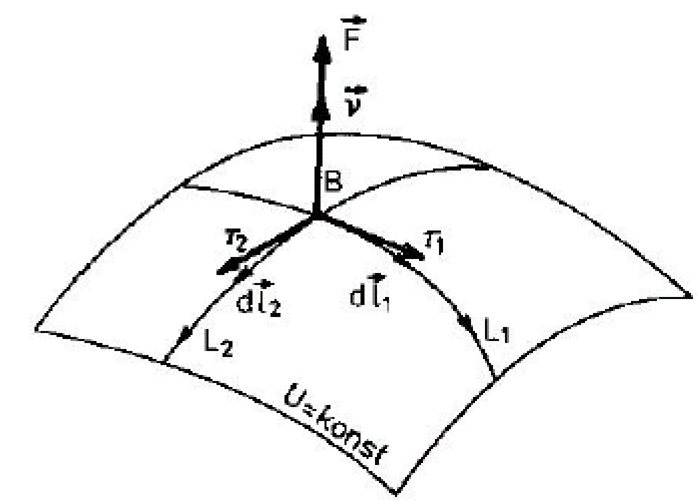
intenzita: $\vec{I}(\vec{r}) = \vec{I}(x, y, z)$

síla: $\vec{F}(\vec{r}) = m\vec{I}(\vec{r})$

$$\varphi(x, y, z) = konst.$$

gradient

$$\vec{I} = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \equiv -grad\,\varphi \equiv -\nabla\varphi$$

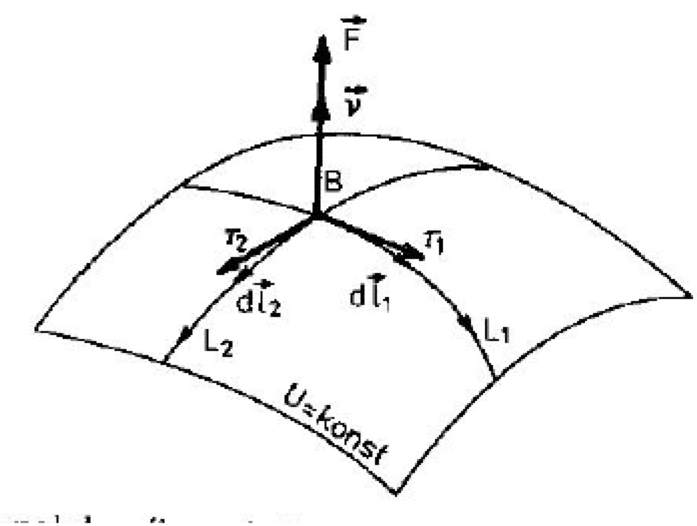


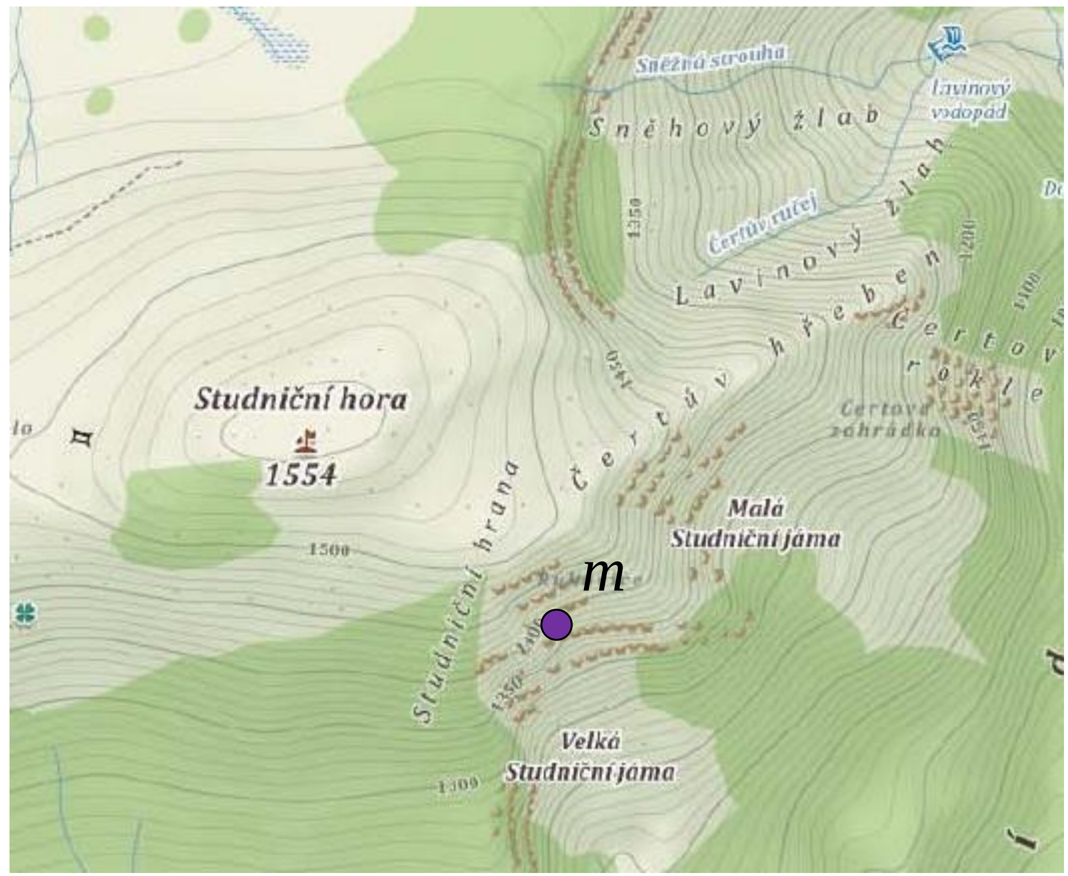
$$\vec{F} = \left(-\frac{\partial E_p}{\partial x}, -\frac{\partial E_p}{\partial y}, -\frac{\partial E_p}{\partial z} \right) \equiv -\nabla E_p$$

Souvislost potenciálu a intenzity pole

$$\vec{I} = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = -\nabla \varphi \qquad \vec{F} = \left(-\frac{\partial E_p}{\partial x}, -\frac{\partial E_p}{\partial y}, -\frac{\partial E_p}{\partial z} \right) = -\nabla E_p$$

$$\varphi(x, y, z) = konst.$$

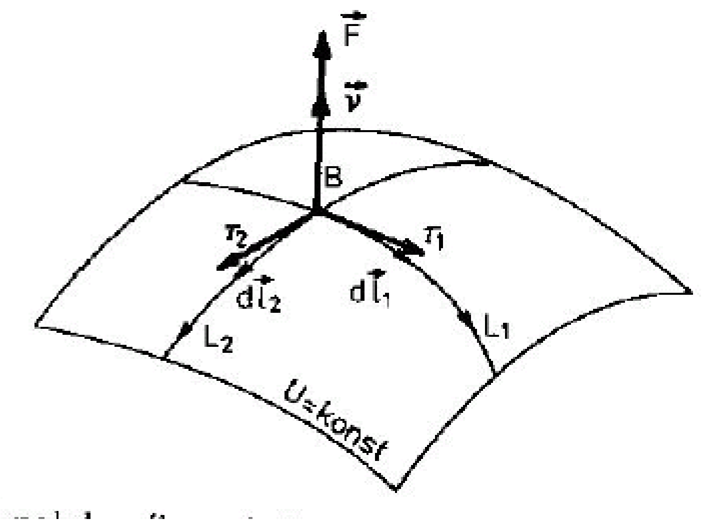


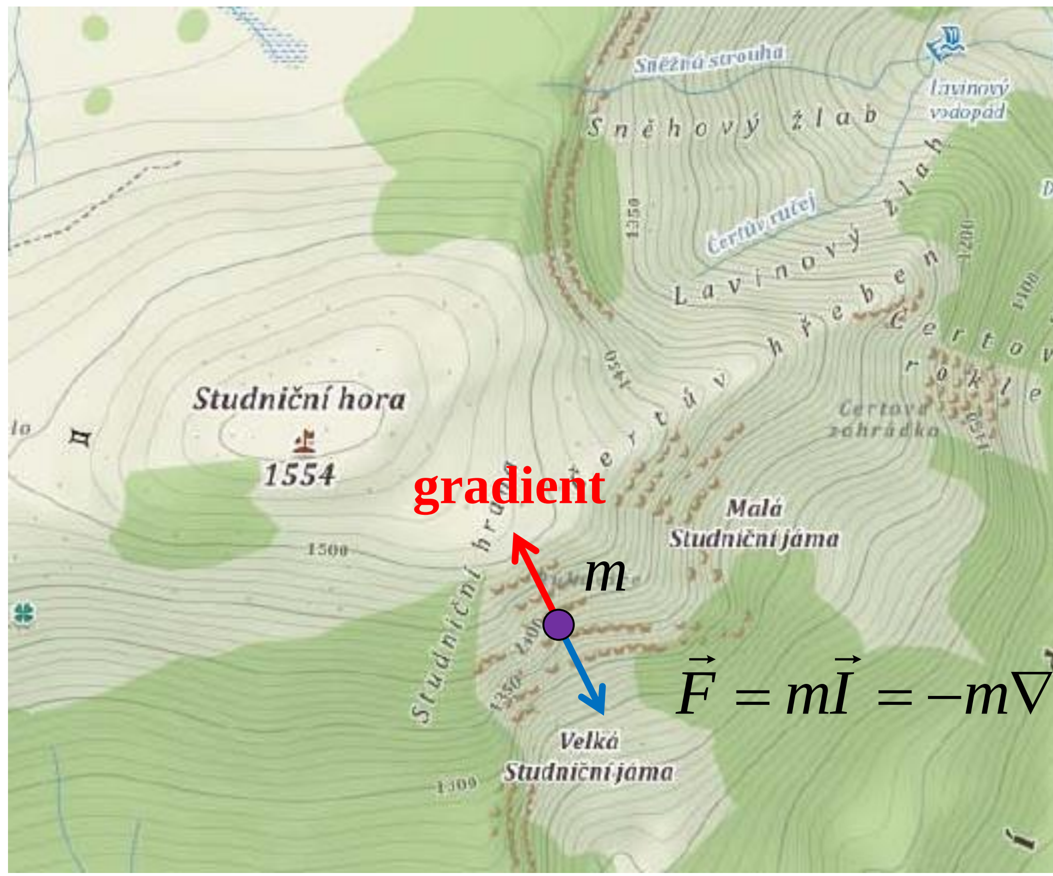


Souvislost potenciálu a intenzity pole

$$\vec{I} = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = -\nabla \varphi \qquad \vec{F} = \left(-\frac{\partial E_p}{\partial x}, -\frac{\partial E_p}{\partial y}, -\frac{\partial E_p}{\partial z} \right) = -\nabla E_p$$

$$\varphi(x, y, z) = konst.$$





Souvislost potenciálu a intenzity pole

Př. gravitační pole:

$$\varphi = -\kappa \frac{M}{r} = -\kappa \frac{M}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

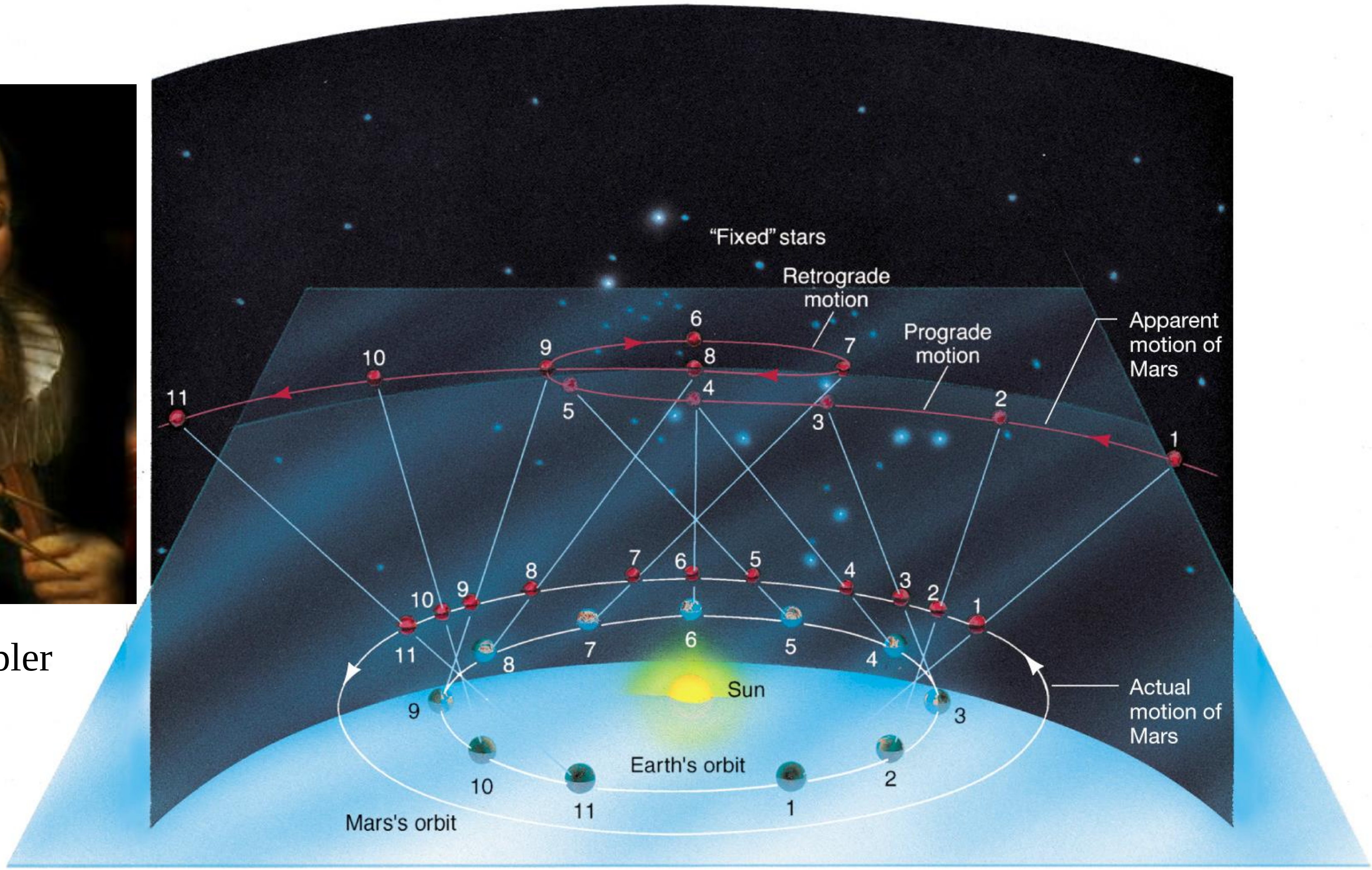
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\kappa M \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = -\kappa M \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\kappa M \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) 2x}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\nabla \varphi = \left(\kappa \frac{M\,x}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \kappa \frac{M\,y}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \kappa \frac{M\,z}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right) = \kappa \frac{M\,\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{I} = -\nabla \varphi = -\kappa \frac{M\,\vec{r}}{r^3}$$

Keplerovy zákony

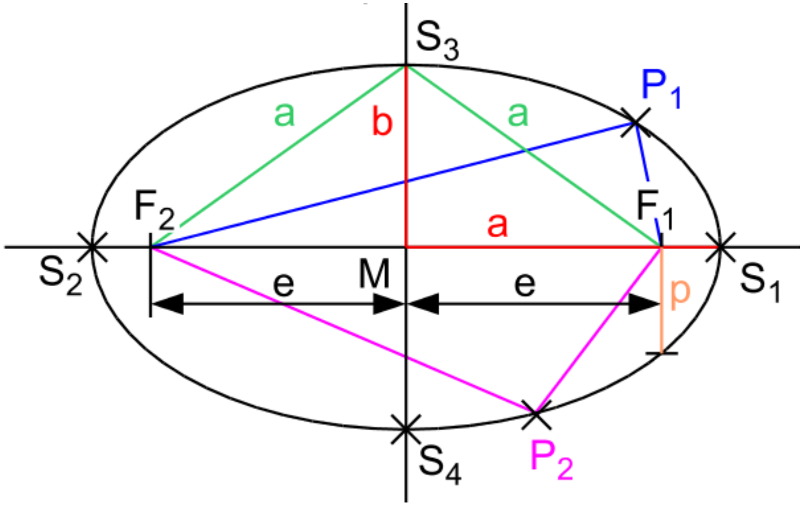
Johannes Kepler

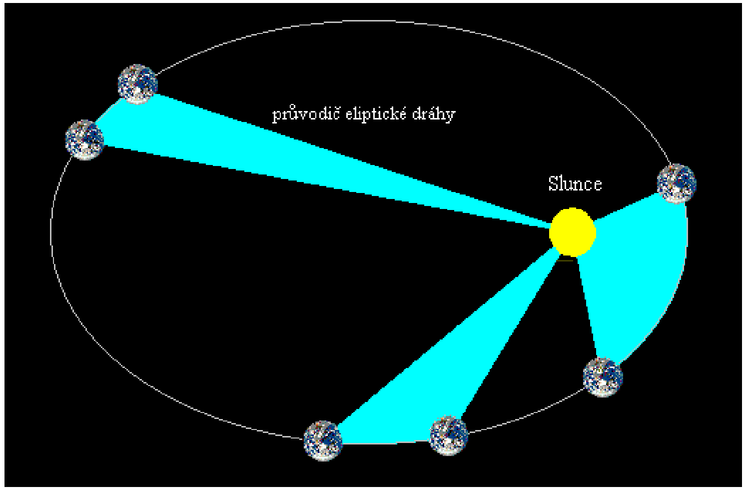


Keplerovy zákony

1. Planety se pohybují okolo Slunce po elipsách, v jejichž jednom ohnisku je Slunce

2. Plochy opsané průvodičem planety (spojnicí planety a Slunce) za stejný čas jsou stejné

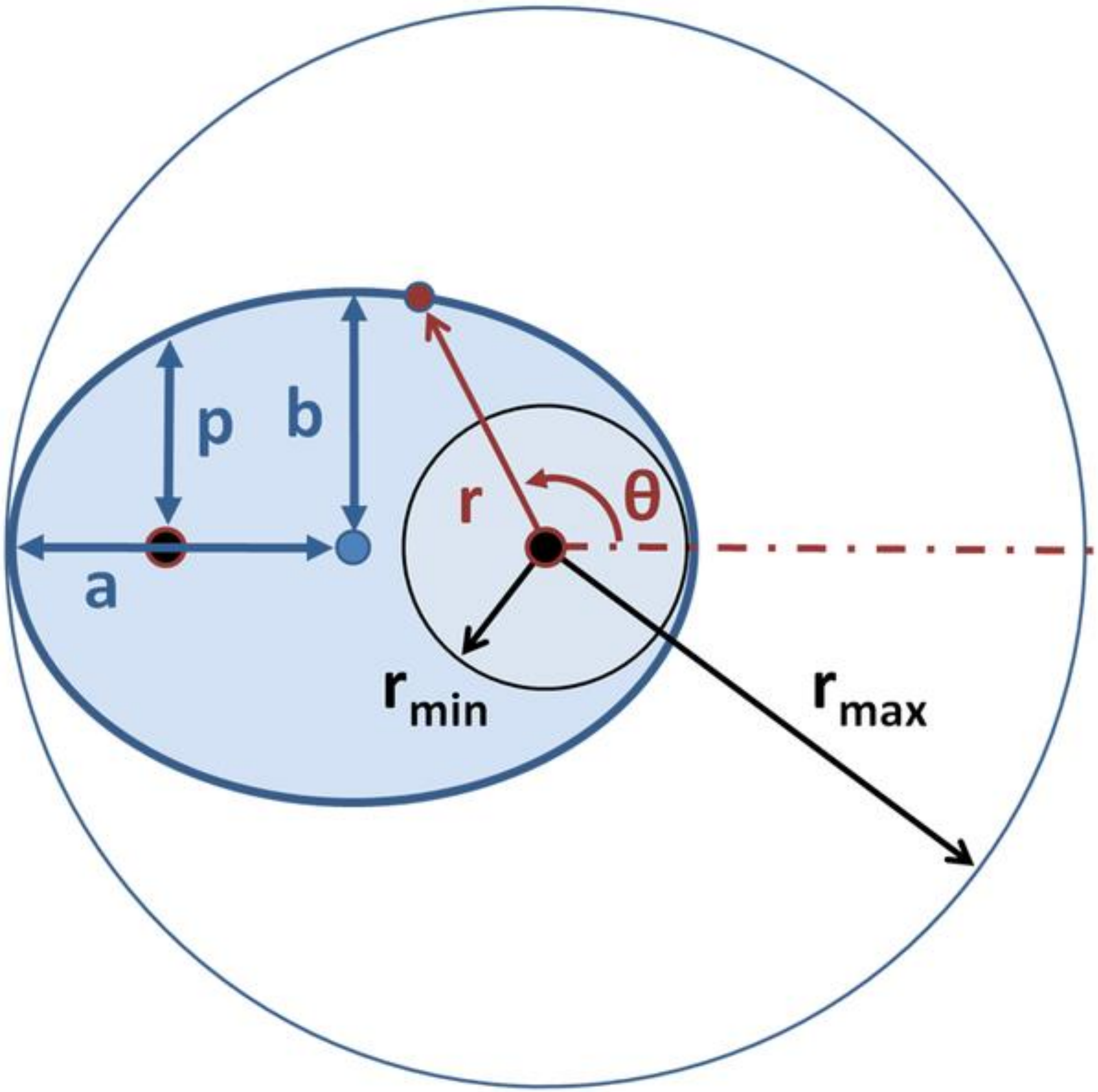




3. Poměr druhých mocnin oběžných dob je roven poměru třetích mocnin hlavní poloosy

$$T \propto a^{\frac{3}{2}}$$

Elipsa



rovnice elipsy:

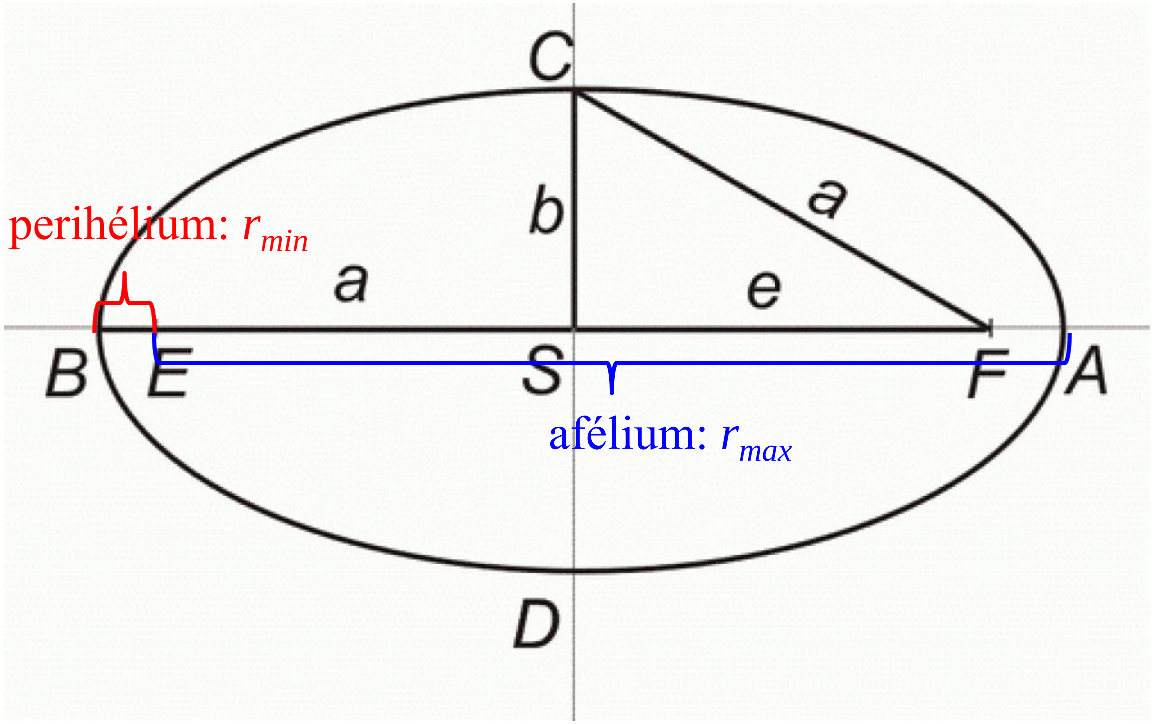
kartézské souřadnice:

$$x = a\cos\omega t$$

$$y = b\sin\omega t$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Elipsa



velká poloosa: a

malá poloosa: b

excentricita: $e^2 = a^2 - b^2$

numerická excentricita: $\varepsilon = e/a$

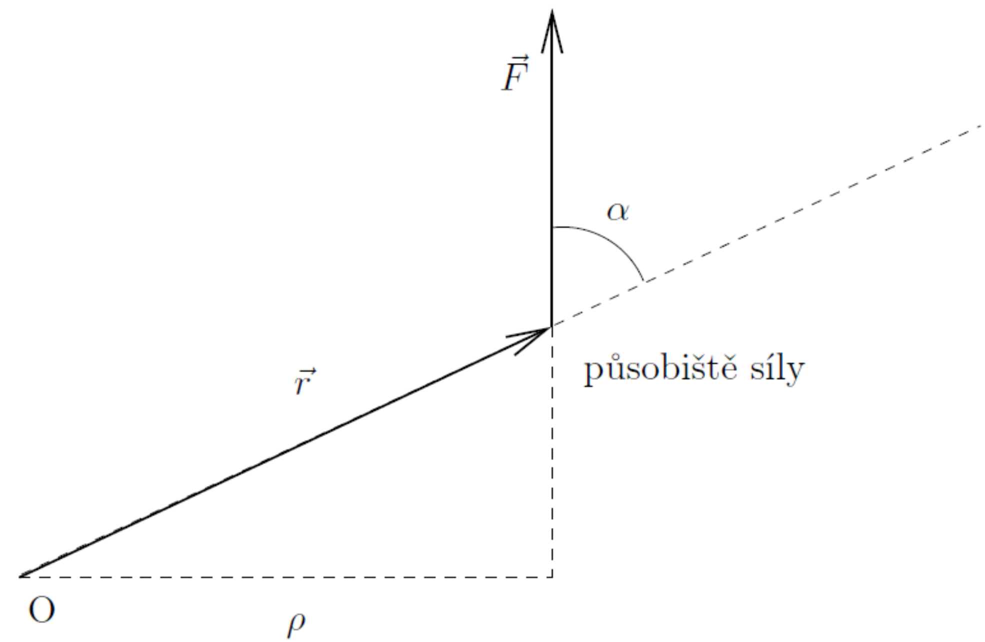
afélium: $r_{max} = a + e = a\,(1+\varepsilon)$

perihélium: $r_{min} = a - e = a\,(1-\varepsilon)$

$$\frac{r_{\max} + r_{\min}}{2} = a$$

$$\frac{r_{\max} - r_{\min}}{2} = e$$

Opakování - moment síly, moment hybnosti



Pro studium kruhového pohybu hmotného bodu (hmotného středu tělesa) zavádíme pojem momentu síly a momentu hybnosti vzhledem k bodu O.

Moment síly: $$\vec{M} \equiv \left[\vec{r} \times \vec{F}\right]$$

Jeho velikost je rovna: $M = rF \sin\alpha = F\rho$

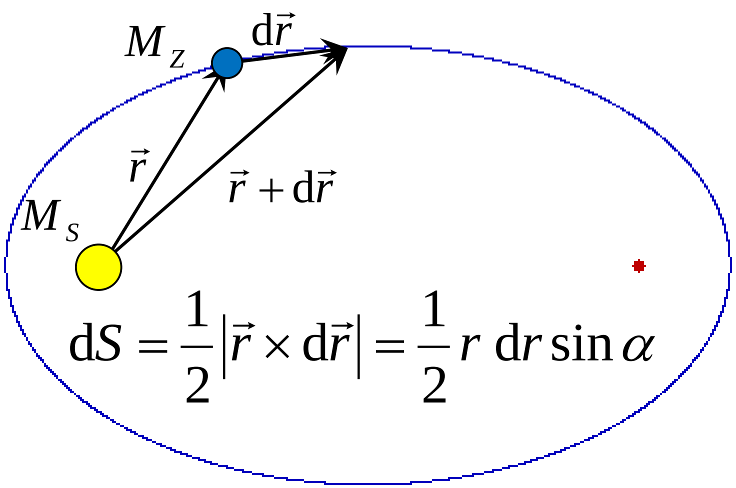
Moment hybnosti: $$\vec{b} \equiv \left[\vec{r} \times \vec{p}\right]$$

Druhý Newtonův zákon vynásobíme zleva vektorově polohovým vektorem:

$$\left[\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right] = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right] = \vec{M} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\vec{r} \times \vec{v}\right] = m\left(\left[\vec{v} \times \vec{v}\right] + \left[\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right]\right) = \left[\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right]$$

2. Keplerův zákon



$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times \mathrm{d}\vec{r}\right| = \frac{1}{2} r\, \mathrm{d}r \sin\alpha$$

$$M_S \rangle\rangle M_Z, \quad \vec{F} = -\kappa \frac{M_Z M_S}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{M} \equiv \left[\vec{r}\times\vec{F}\right] = \vec{r}\times \frac{-\kappa M_Z M_S}{r^3}\vec{r} = 0$$

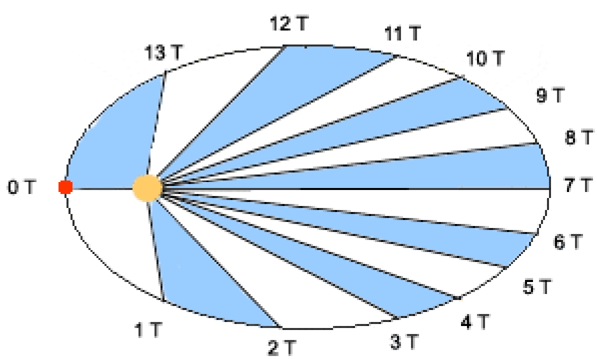
$$\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t} = \vec{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{b} = \vec{b}_0 = konst.$$

$$\left|\vec{b}_0\right| = \left|\vec{r}\times M_Z \vec{v}\right| = r M_Z v \sin\alpha = konst.$$

Vektor momentu hybnosti je kolmý na rovinu danou polohovým vektorem a směrem rychlosti =>
=> pohyb v centrálním gravitačním poli je rovinný

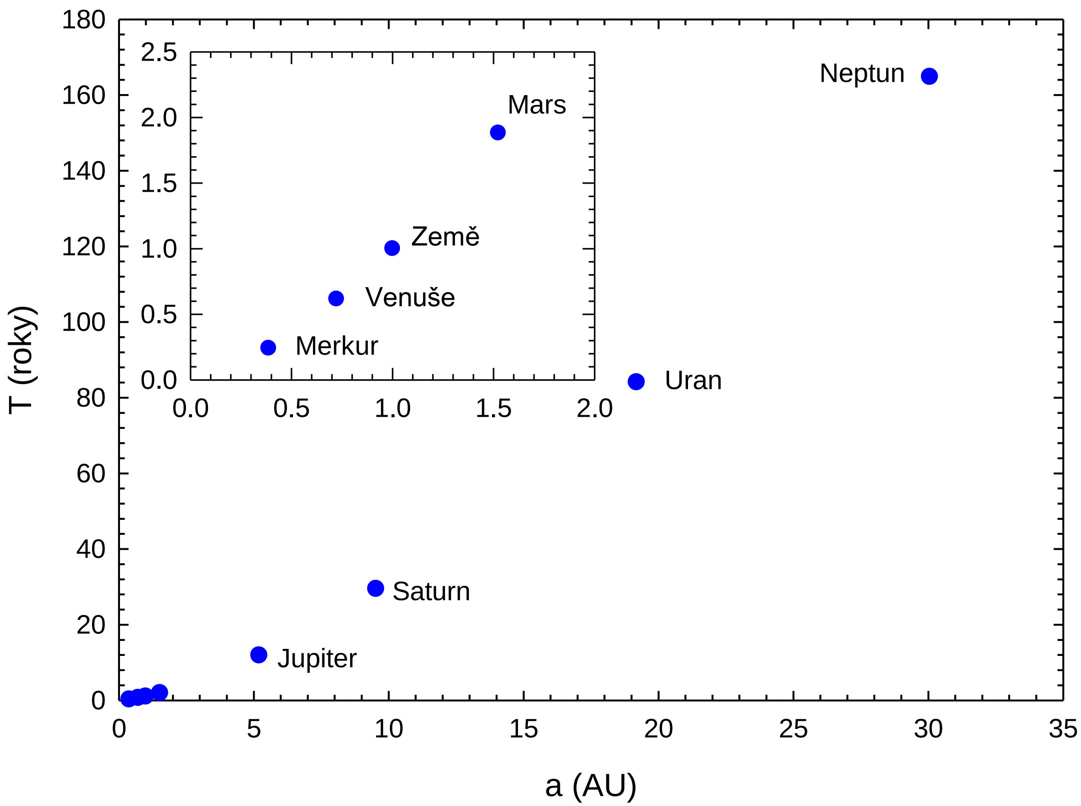
plošná rychlost:

$$v_P = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} r v \sin\alpha$$



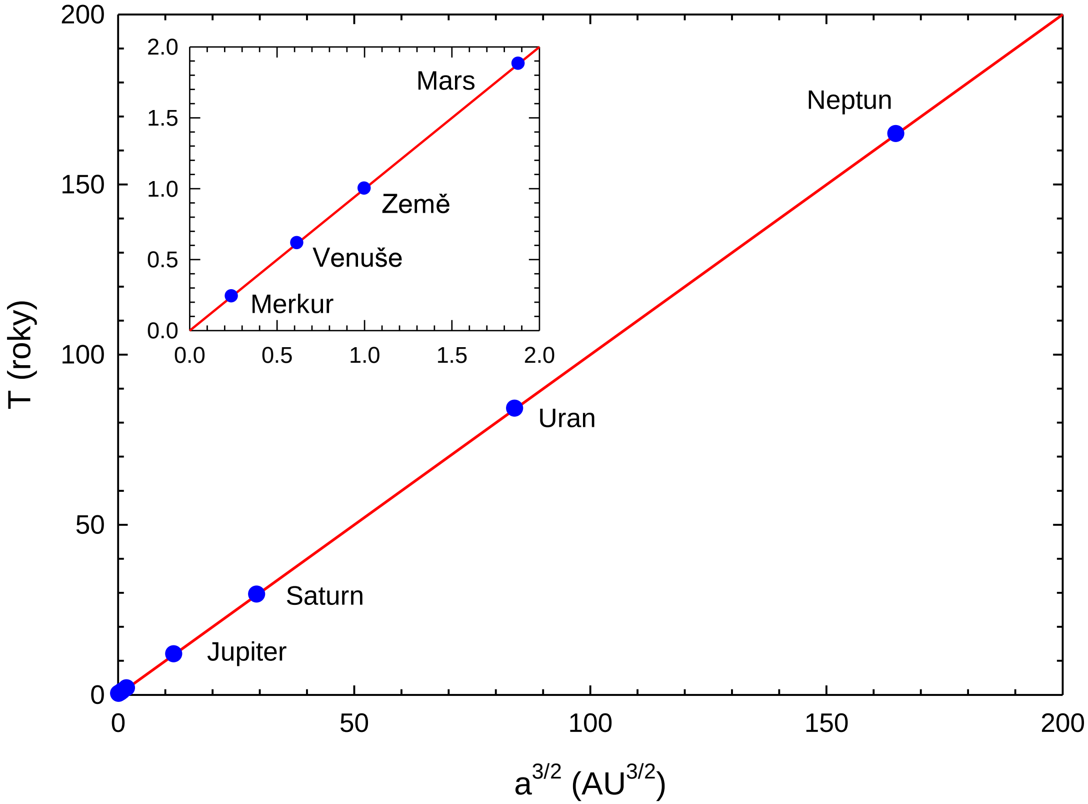
$$v_P = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} r v \sin\alpha = \frac{b_0}{2M_Z} = konst.$$

3. Kepplerův zákon



Astronomická jednotka:
Střední vzdálenost Země-Slunce
1 AU = 149.6 × 10^6 km

3. Kepplerův zákon

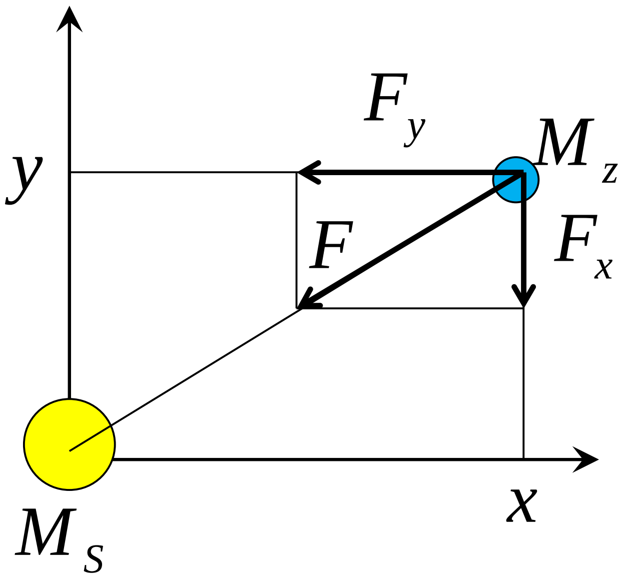


$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\kappa M} = konst.$$

$$T[\mathrm{rok}] = \sqrt{\frac{4\pi}{\kappa M} a^3} = k\left(a[\mathrm{AU}]\right)^{\frac{3}{2}}$$

Astronomická jednotka:
Střední vzdálenost Země-Slunce
1 AU = 149.6 × 10^6 km

Keplerova úloha – trajektorie Země (planet)



$$\vec{F} = -\kappa \frac{M_Z M_S}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$M_Z \vec{a} = \vec{F}$$

pohybové rovnice:

$$a_x = -\kappa \frac{M_S}{r^3} x$$

$$a_y = -\kappa \frac{M_S}{r^3} y$$

počáteční podmínky:

$$v_x(0) = 0$$

$$v_y(0) = 6.166$$

$$x(0) = 1.0167$$

$$y(0) = 0$$

jednotky:

hmotnost: $M_Z = 5.97 \times 10^{24}$ kg

čas: 1 rok = 3.1536×10^{7} s

vzdálenost: 1 AU = 149.6×10^{6} km

gravitační konstanta:

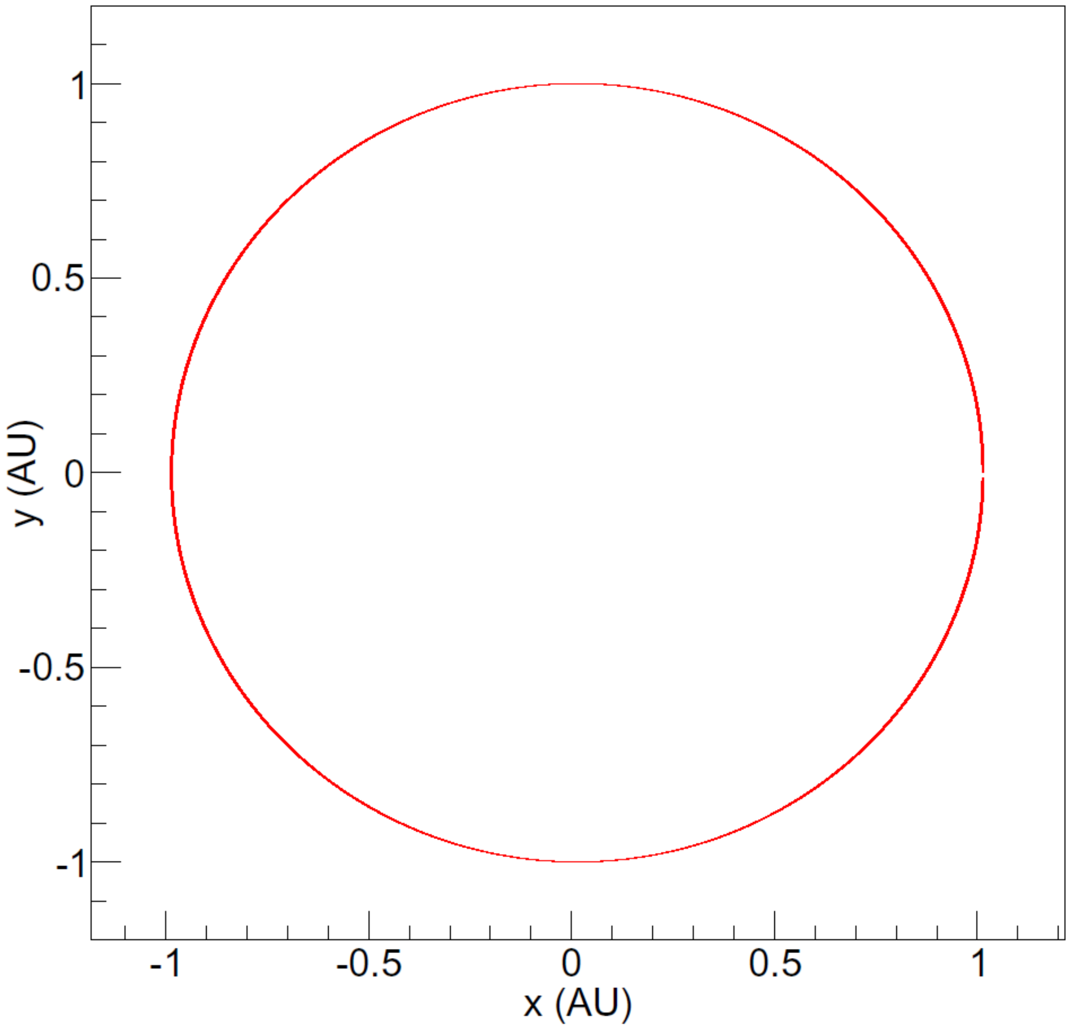
$\kappa = 1.18 \times 10^{-4}\ M_Z^{-1} AU^3\ rok^{-2}$

hmotnost Slunce:

$M_S = 1.99 \times 10^{30}$ kg = $3.33 \times 10^{5}\ M_Z$

Keplerova úloha

trajektorie Země



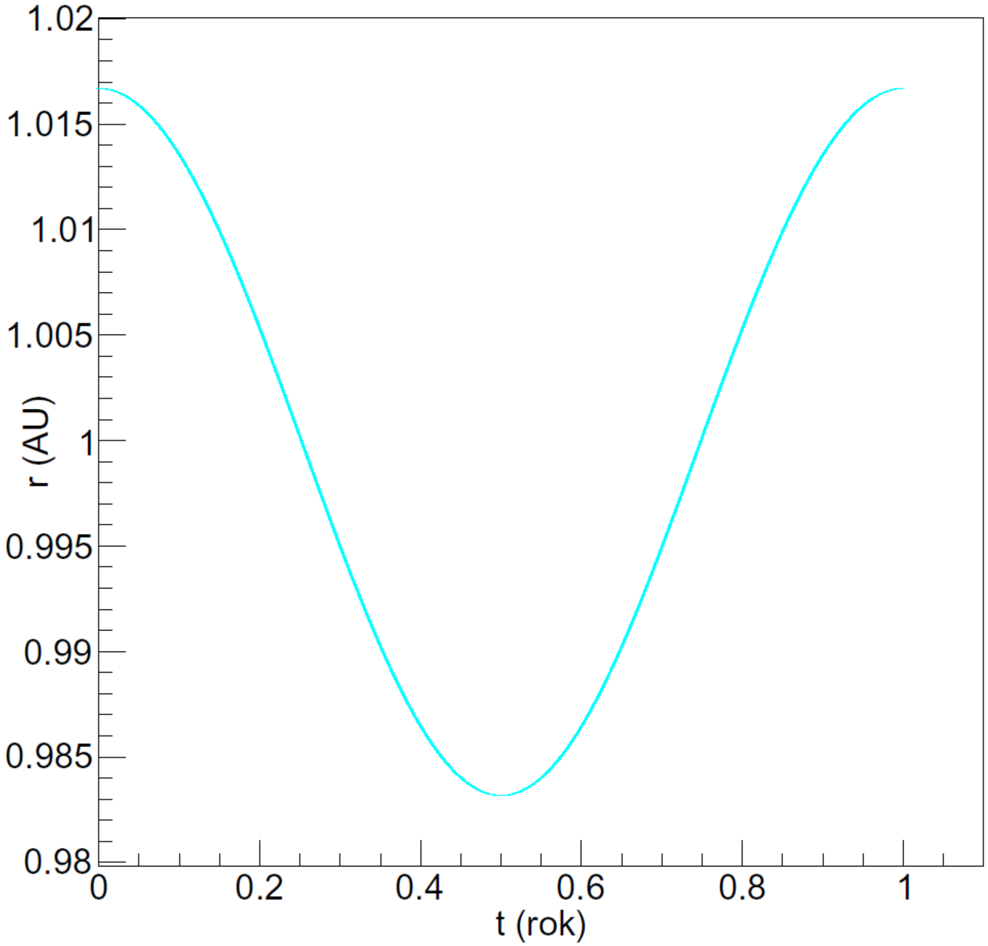
maximální vzdálenost od Slunce (afélium): 1.0167 AU

minimální vzdálenost od Slunce (perihelium): 0.9833 AU

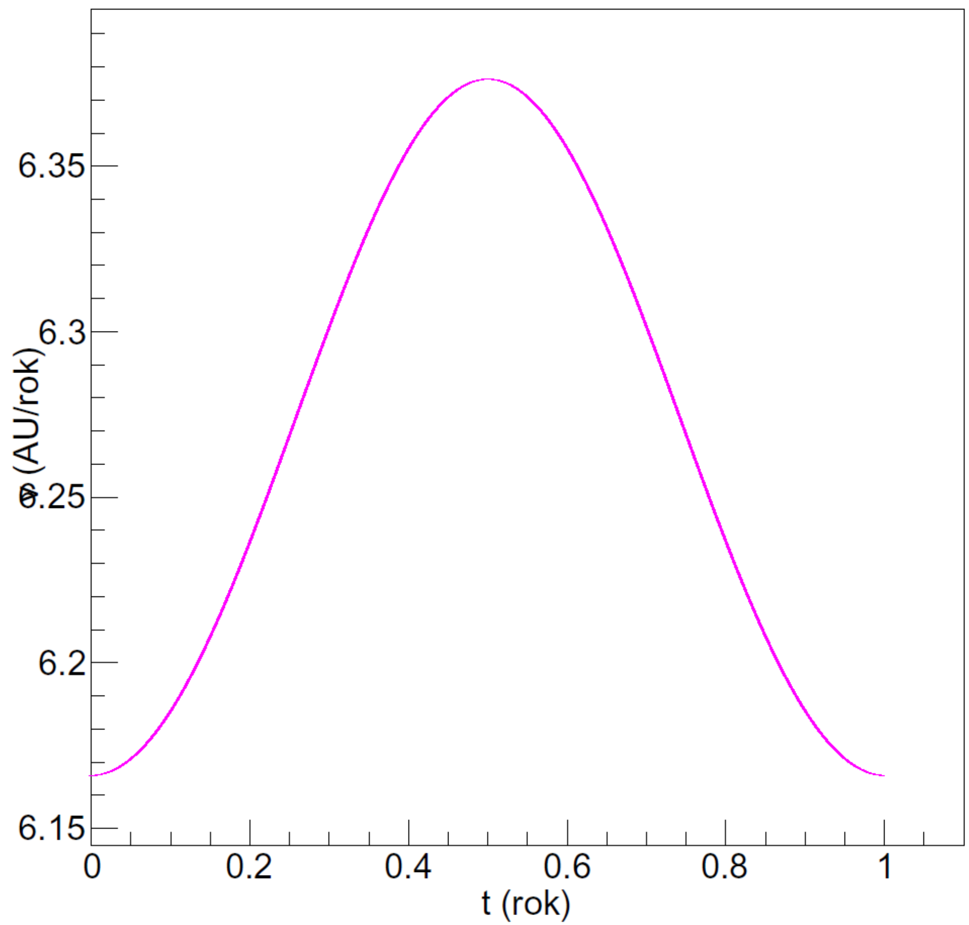
numerická excentricita: 0.0167

Keplerova úloha

vzdálenost Země od Slunce

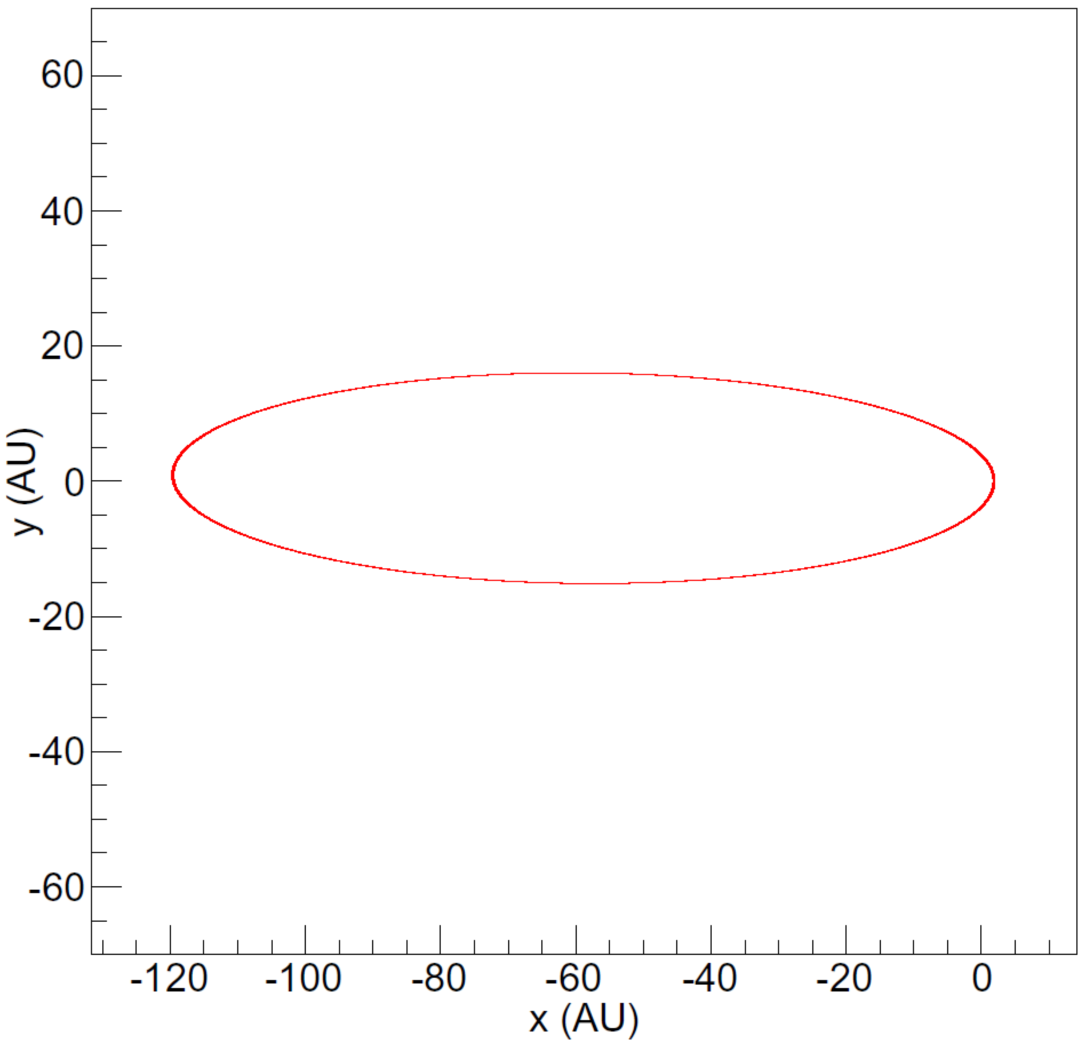


rychlost Země



Keplerova úloha

kdybysme umístili Zemi do dvojnásobné vzdálenosti



maximální vzdálenost od Slunce (afélium): 119.462 AU

minimální vzdálenost od Slunce (perihelium): 2.033 AU

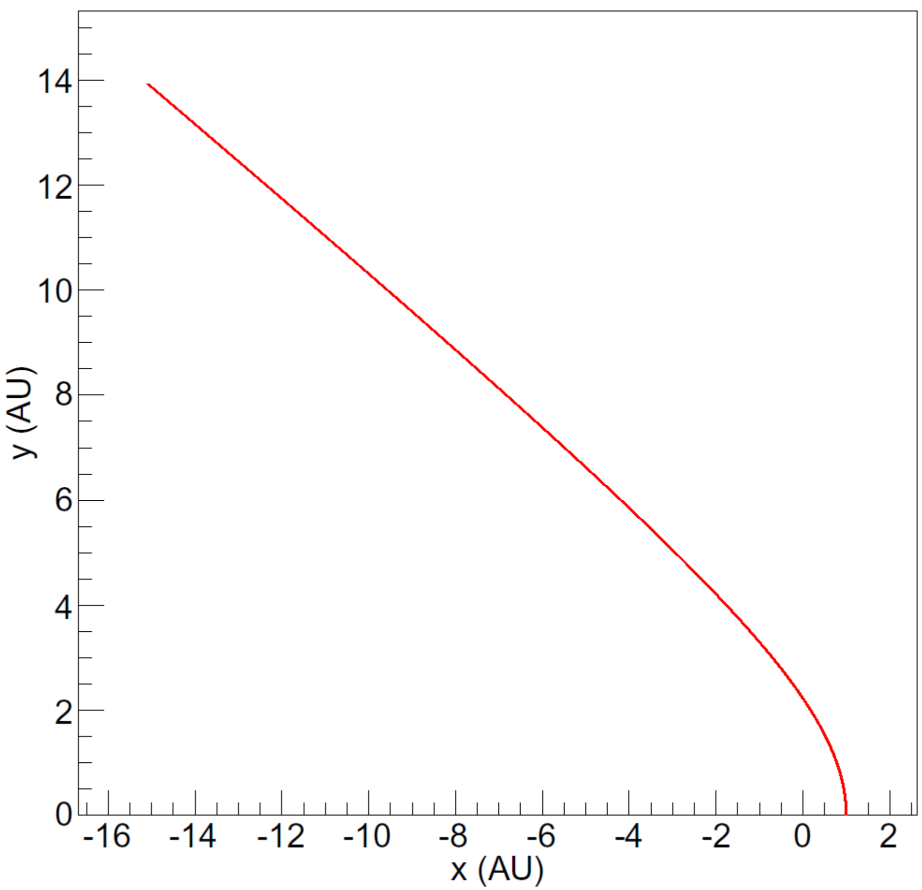
numerická excentricita: 0.967

perioda oběhu: 473.5 roku

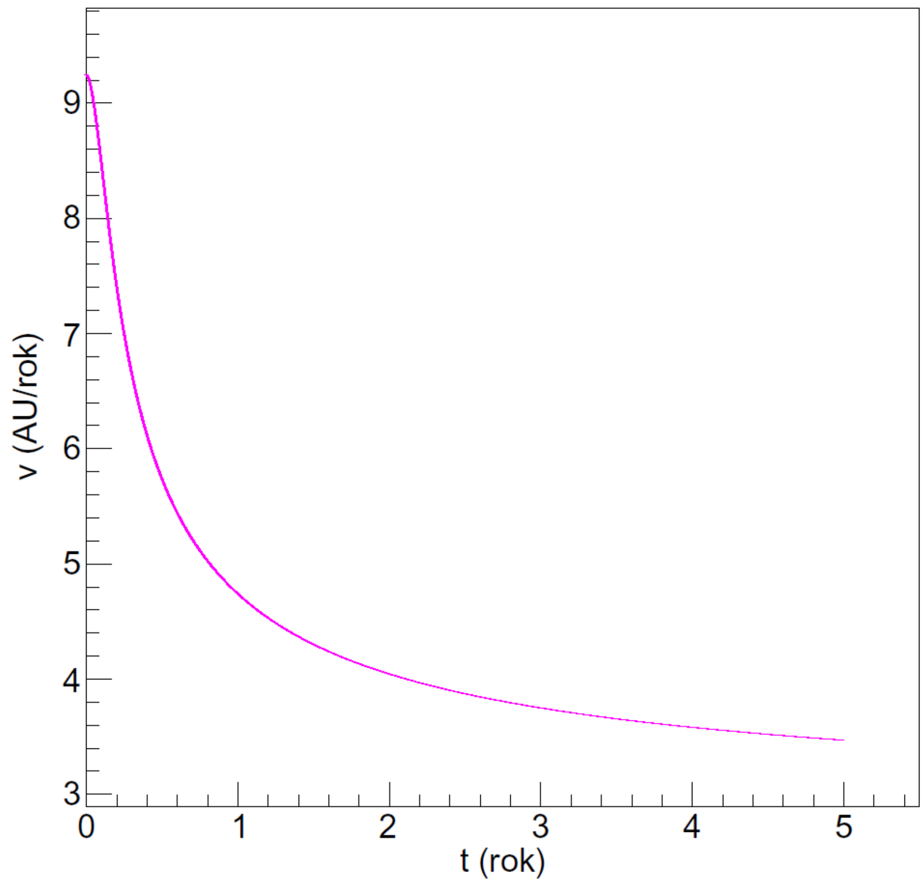
Keplerova úloha

kdybysme zvýšili rychlost Země o 50%: $v_y(0)$ 6.166 AU/rok → 9.249 AU/rok

trajektorie



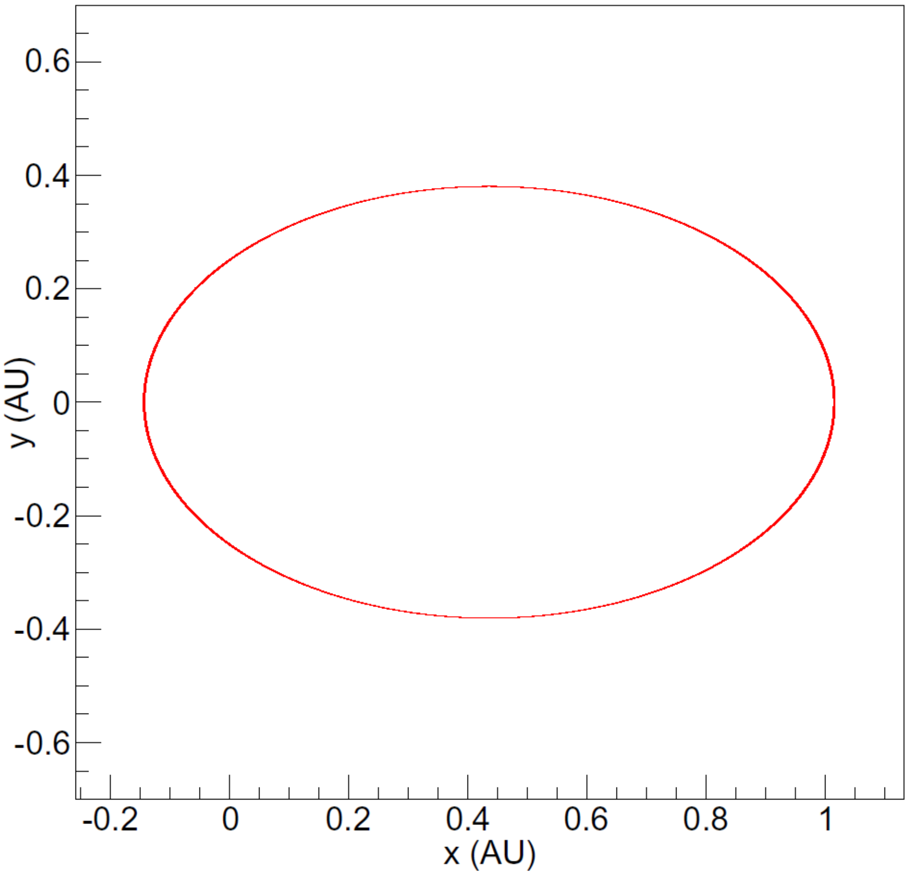
rychlost



Keplerova úloha

kdybysme snížili rychlost Země o 50%: $v_y(0)$ 6.166 AU/rok → 3.083 AU/rok

trajektorie



rychlost

maximální vzdálenost od Slunce (afélium): 1.0167 AU

minimální vzdálenost od Slunce (perihelium): 0.142 AU

numerická excentricita: 0.754

perioda oběhu: 0.441 roku

Planeta ve vzduchu

Pohybové rovnice

$$a_x = \frac{F_x}{m} \qquad F_x = -\kappa \frac{mM_S}{r^3} x - hv_x$$

$$a_y = \frac{F_y}{m} \qquad F_y = -\kappa \frac{mM_S}{r^3} y - hv_y$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

počáteční podmínky

$$x(t=0) = 1 \text{ AU}$$

$$y(t=0) = 0$$

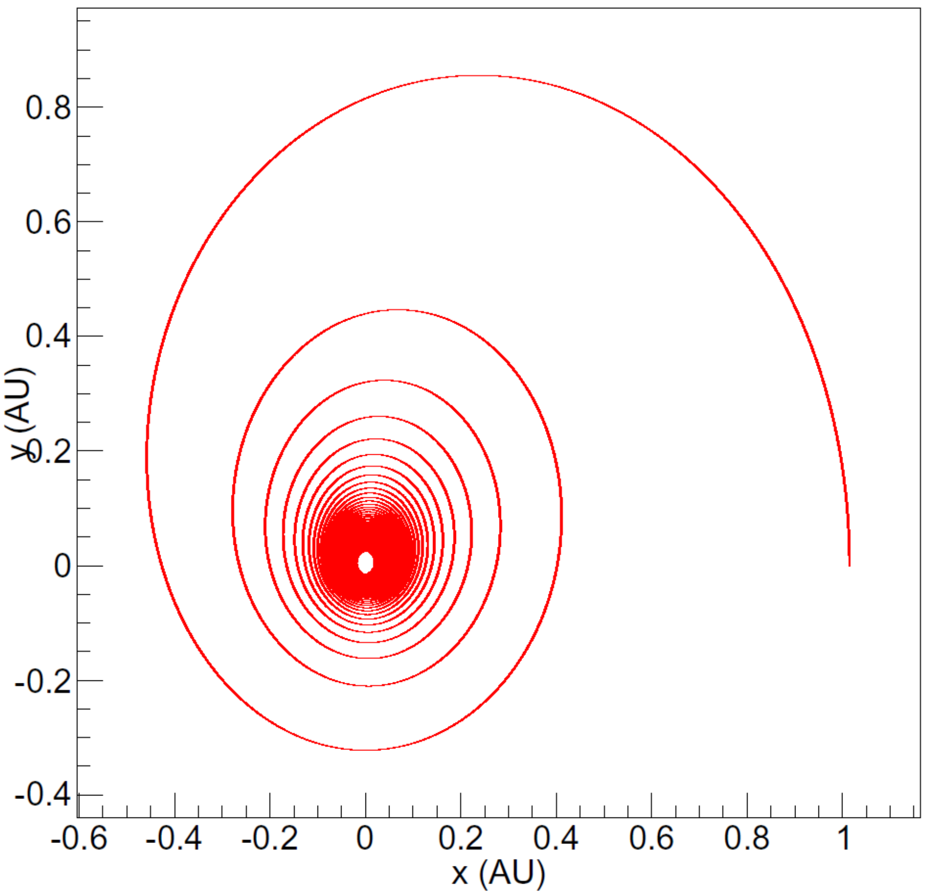
$$v_x(t=0) = 0$$

$$v_y(t=0) = 6.166 \text{ AU/rok}$$

$$h = 1$$

Planeta ve vzduchu

trajektorie



vzdálenost od Slunce